15 Mai 2006.

1 Notations allégées

On allège les notations :

$$\Phi \Rightarrow \phi,\ \hat{\phi}_2 \Rightarrow \Phi,\ \Psi_2 \Rightarrow \Psi,\ U_2 \Rightarrow U,\ \Lambda_2 \Rightarrow \Lambda,\ \mathcal{A}_2 \Rightarrow A.$$

2 Formules diverses

Dérivée / $\nu = m^{\frac{2}{3}},\ m = M/M_\odot$:

$$\frac{\partial}{\partial R} = \frac{8\pi R_\odot^2}{3M_\odot}\frac{r^2\rho}{\sqrt{\nu}}\frac{\partial}{\partial \nu}$$

Expression de ϕ :

$$\phi = -\frac{\mu}{80C_P}\left\{(12Z-48)\ln(64-48\mu+12Z\mu)+(32-23Z)\ln(-16+32\mu-32Z\mu)\right.$$
$$\left.+5Z\ln(5Z)+(16+6Z)\ln(32+16\mu+6Z\mu)\right\}$$

Expression de $\frac{\mathrm{d}\ln g}{\mathrm{d}\ln R}$:

$$g(M,R) = \frac{GM}{R^2} \Rightarrow \mathrm{d}g = \frac{\partial g}{\partial M}\mathrm{d}M + \frac{\partial g}{\partial R}\mathrm{d}R = g\left(\frac{4\pi R^2\rho}{M} - \frac{2}{R}\right)\mathrm{d}R \Rightarrow$$
$$\frac{\mathrm{d}\ln g}{\mathrm{d}\ln R} = \frac{R}{g}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}R} = \frac{4\pi R^3\rho}{M} - 2$$

Expression de $\frac{\partial \ln\rho}{\partial\nu}$:

$$\frac{\partial P}{\partial R} = -\frac{GM\rho}{R^2} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial \nu} = -\frac{3GM_\odot^2}{8\pi R_\odot^4}\frac{\nu^2}{r^4}$$
$$\mathrm{d}\ln\rho = \alpha\mathrm{d}\ln P - \delta\mathrm{d}\ln T + \varphi\mathrm{d}\ln\mu = (\alpha - \delta\nabla)\,\mathrm{d}\ln P + \varphi\mathrm{d}\ln\mu \Rightarrow$$
$$\frac{\partial\ln\rho}{\partial\nu} = -\frac{3GM_\odot^2}{8\pi R_\odot^4}\frac{(\alpha-\delta\nabla)\,\nu^2}{r^4 P} + \varphi\frac{\partial\ln\mu}{\partial\nu}$$

Pour profiter de la réduction d'un ordre de dérivation (donc d'une variable principale) résultant de l'intégration par parties, comme il a été fait avec le groupe d'équations de Talon/Zahn, on divise les équations (21) p.5 par ν et on remplace $\mathcal{A}_2$ par son expression (22).

On note les variables principales par des Majuscules :

1. Ω : vitesse angulaire,
2. U : vitesse de circulation méridienne,
3. Ψ : taux de fluctuation de température le long d'une isobare,
4. Λ : taux de fluctuation du poids moléculaire moyen le long d'une isobare,
5. Φ : taux de fluctuation du potentiel gravitationnel le long d'une isobare.

On note les facteurs par F_n.

3 Equ.(22) et expressions dérivées de A

$$A = H_T \frac{\partial \Psi}{\partial R} - (1 - \delta + \chi_{\mathrm{T}})\,\Psi - (\varphi + \chi_\mu)\,\Lambda$$
$$A = \frac{8\pi R_\odot^2}{3M_\odot} \frac{r^2 \rho H_{\mathrm{T}}}{\sqrt{\nu}} \frac{\partial \Psi}{\partial \nu} - (1 - \delta + \chi_{\mathrm{T}})\,\Psi - (\varphi + \chi_\mu)\,\Lambda$$
$$\frac{2}{3}\frac{\partial A}{\partial \nu} = \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{16\pi R_\odot^2}{9M_\odot} \frac{r^2 \rho H_{\mathrm{T}}}{\sqrt{\nu}} \frac{\partial \Psi}{\partial \nu}\right) - \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{2}{3}(1 - \delta + \chi_{\mathrm{T}})\,\Psi\right) - \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{2}{3}(\varphi + \chi_\mu)\,\Lambda\right) =$$
$$\frac{\partial}{\partial \nu}\left(F_{17}\frac{\partial \Psi}{\partial \nu}\right) + \frac{\partial F_{18}\Psi}{\partial \nu} + \frac{\partial F_{11}\Lambda}{\partial \nu},$$
$$F_{17} = \frac{16\pi R_\odot^2}{9M_\odot} \frac{r^2 \rho H_{\mathrm{T}}}{\sqrt{\nu}},\ F_{18} = -\frac{2}{3}(1 - \delta + \chi_{\mathrm{T}}),\ F_{11} = -\frac{2}{3}(\varphi + \chi_\mu),$$
$$\frac{1}{\nu}\frac{\partial \ln l}{\partial \ln m} A = \frac{8\pi R_\odot^2}{3M_\odot} \frac{r^2 \rho H_{\mathrm{T}}}{\nu^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial \ln l}{\partial \ln m} \frac{\partial \Psi}{\partial \nu} - \frac{1 - \delta + \chi_{\mathrm{T}}}{\nu} \frac{\partial \ln l}{\partial \ln m}\Psi - \frac{\varphi + \chi_\mu}{\nu}\frac{\partial \ln l}{\partial \ln m}\Lambda \rightarrow$$
$$\frac{1}{\nu}\frac{\partial \ln l}{\partial \ln m} A = -F_{12}\frac{\partial \Psi}{\partial \nu} - \frac{1 - \delta + \chi_{\mathrm{T}}}{\nu} \frac{\partial \ln l}{\partial \ln m}\Psi - \frac{\varphi + \chi_\mu}{\nu}\frac{\partial \ln l}{\partial \ln m}\Lambda,$$
$$F_{12} = -\frac{8\pi R_\odot^2}{3M_\odot} \frac{r^2 \rho H_{\mathrm{T}}}{\nu^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial \ln l}{\partial \ln m}.$$

4 Equ. B4 Expression de U

$$0 = \frac{Mg\rho c_{\mathrm{P}} T}{LP}(\nabla_{\mathrm{ad}} - \nabla)\,U \tag{1}$$
$$+2\left\{1 - \frac{1}{6\pi G\rho R^2}\frac{\partial R^3\Omega^2}{\partial R} - \frac{\epsilon + \epsilon_g}{\epsilon_m}\right\}\left\{\frac{R^2\Omega^2}{3g^2}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}R} - \frac{2R\Omega^2}{3g} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\left(\frac{\Phi}{g}\right)\right\} \tag{2}$$
$$-\frac{R\Omega}{3\pi G\rho}\frac{\partial \Omega}{\partial R} \tag{3}$$
$$-\frac{\rho_m}{\rho}\left\{\frac{R}{3}\frac{\partial A}{\partial R} - \frac{2H_T}{R}\left(1 + \frac{D_h}{K}\right)\Psi\right\} \tag{4}$$
$$-\frac{\epsilon + \epsilon_g}{\epsilon_m}\left\{A + [f_\epsilon(\epsilon_T - \delta) + \delta]\,\Psi + [f_\epsilon(\epsilon_\mu + \varphi) - \varphi]\,\Lambda\right\} \tag{5}$$
$$+\frac{Mc_{\mathrm{P}}T}{L}\left(\frac{D\Psi}{Dt} + \phi\frac{D\ln\mu}{Dt}\Lambda\right) \tag{6}$$

4.1 Equation 1 (Page 2)

$$\frac{Mg\rho c_{\mathrm{P}} T}{LP}(\nabla_{\mathrm{ad}} - \nabla)\,U = \nu\left\{\frac{M_\odot}{L_\odot}\frac{g\rho c_{\mathrm{P}} T\sqrt{\nu}}{lP}(\nabla_{\mathrm{ad}} - \nabla)\,U\right\}$$

4.2 Equation 2 (Page 2)

$$\frac{2}{\nu}\left\{1 - \frac{1}{6\pi G\rho R^2}\frac{\partial R^3\Omega^2}{\partial R} - \frac{\epsilon + \epsilon_g}{\epsilon_m}\right\} = \frac{2}{\nu} - \frac{1}{3\pi G\rho R^2\nu}\left(3R^2\Omega^2 + 2R^3\Omega\frac{\partial \Omega}{\partial R}\right) - \frac{2}{\nu}\frac{\partial \ln l}{\partial \ln m} =$$

$$\frac{2}{\nu}\left(1-\frac{\partial \ln l}{\partial \ln m}\right)-\frac{\Omega^2}{\pi G\rho\nu}-\frac{2R}{3\pi G\rho\nu}\Omega\frac{\partial\Omega}{\partial R}$$

$$\frac{R^2}{3g^2}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}R}\Omega^2-\frac{2R\Omega^2}{3g}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\left(\frac{\Phi}{g}\right)=\left(\frac{R}{3g}\frac{\mathrm{d}\ln g}{\mathrm{d}\ln R}-\frac{2R}{3g}\right)\Omega^2+\frac{1}{Rg}\frac{\mathrm{d}\ln g}{\mathrm{d}\ln R}\Phi-\frac{1}{g}\frac{\partial\Phi}{\partial R}=$$

$$\frac{R}{3g}\left(\frac{\mathrm{d}\ln g}{\mathrm{d}\ln R}-2\right)\Omega^2+\frac{1}{gR}\frac{\mathrm{d}\ln g}{\mathrm{d}\ln R}\Phi-\frac{1}{g}\frac{\partial\Phi}{\partial R}$$

$$2\{-\}\{-\}=\nu\left(\frac{2}{\nu}\{-\}\{-\}\right)=$$

$$\nu\left\{\frac{2R}{3g\nu}\left(1-\frac{\partial \ln l}{\partial \ln m}\right)\left(\frac{\mathrm{d}\ln g}{\mathrm{d}\ln R}-2\right)\Omega^2+\frac{2}{g\nu R}\frac{\mathrm{d}\ln g}{\mathrm{d}\ln R}\left(1-\frac{\partial \ln l}{\partial \ln m}\right)\Phi\right.$$

$$-\frac{2}{g\nu}\left(1-\frac{\partial \ln l}{\partial \ln m}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial R}-\frac{R}{3\pi Gg\rho\nu}\left(\frac{\mathrm{d}\ln g}{\mathrm{d}\ln R}-2\right)\Omega^4-\frac{1}{\pi Gg\rho\nu R}\frac{\mathrm{d}\ln g}{\mathrm{d}\ln R}\Omega^2\Phi$$

$$+\frac{1}{\pi Gg\rho\nu}\Omega^2\frac{\partial\Phi}{\partial R}-\frac{2R^2}{9\pi Gg\rho\nu}\left(\frac{\mathrm{d}\ln g}{\mathrm{d}\ln R}-2\right)\Omega^3\frac{\partial\Omega}{\partial R}$$

$$\left.-\frac{2}{3\pi Gg\rho\nu}\frac{\mathrm{d}\ln g}{\mathrm{d}\ln R}\Omega\Phi\frac{\partial\Omega}{\partial R}+\frac{2R}{3\pi Gg\rho\nu}\Omega\frac{\partial\Omega}{\partial R}\frac{\partial\Phi}{\partial R}\right\}$$

5 Equation 2 (Page 2) avec γ

Avec l'approximation $\tilde{g}/g=\gamma$ on devrait obtenir des résultats similaires à ceux obtenus avec le formalisme de Talon & Zahn 1997 :

$$\frac{\tilde{g}}{g}=\left\{\frac{R^2\Omega^2}{3g^2}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}R}-\frac{2R\Omega^2}{3g}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\left(\frac{\Phi}{g}\right)\right\}\sim\gamma=\frac{4R^3\Omega^2}{3GM}=\frac{4R_\odot^3}{3GM_\odot}\frac{r^3\Omega^2}{\nu^{\frac{3}{2}}}$$

$$2\{-\}\frac{\tilde{g}}{g}=\nu\left\{\frac{2\gamma}{\nu}\left(1-\frac{\partial \ln l}{\partial \ln m}\right)-\frac{\gamma\Omega^2}{\pi G\rho\nu}-\frac{2R\gamma}{3\pi G\rho\nu}\Omega\frac{\partial\Omega}{\partial R}\right\}=$$

$$\nu\left\{\frac{8R_\odot^3}{3GM_\odot}\frac{r^3}{\nu^{\frac{5}{2}}}\left(1-\frac{\partial \ln l}{\partial \ln m}\right)\Omega^2-\frac{4R_\odot^3}{3\pi G^2M_\odot}\frac{r^3}{\rho\nu^{\frac{5}{2}}}\Omega^4-\frac{64R_\odot^6}{27G^2M_\odot^2}\frac{r^6}{\nu^3}\Omega^3\frac{\partial\Omega}{\partial\nu}\right\}$$

5.1 Equation 3 (Page 2)

$$\frac{R\Omega}{3\pi G\rho}\frac{\partial\Omega}{\partial R}=\nu\left\{\frac{8R_\odot^3}{9M_\odot G}\frac{r^3}{\nu^{\frac{3}{2}}}\Omega\frac{\partial\Omega}{\partial\nu}\right\}$$

5.2 Equation 4 (Page 2)

$$\frac{\rho_m}{\rho}\left\{\frac{R}{3}\frac{\partial A}{\partial R}-\frac{2H_T}{R}\left(1+\frac{D_h}{K}\right)\Psi\right\}=$$

$$\frac{3M_\odot}{4\pi R_\odot^3}\frac{\nu^{\frac{3}{2}}}{r^3\rho}\frac{R_\odot r}{3}\frac{8\pi R_\odot^2}{3M_\odot}\frac{r^2\rho}{\sqrt{\nu}}\frac{\partial A}{\partial\nu}-\frac{3M_\odot}{4\pi R_\odot^3}\frac{\nu^{\frac{3}{2}}}{r^3\rho}\frac{2H_T}{R_\odot r}\left(1+\frac{D_h}{K}\right)\Psi=$$

$$\nu\frac{2}{3}\frac{\partial A}{\partial\nu}-\frac{3M_\odot}{2\pi R_\odot^4}\frac{H_T\nu^{\frac{3}{2}}}{r^4\rho}\left(1+\frac{D_h}{K}\right)\Psi=$$

$$\nu\left\{\frac{\partial}{\partial\nu}\left(F_{17}\frac{\partial\Psi}{\partial\nu}\right)+\frac{\partial F_{18}\Psi}{\partial\nu}+\frac{\partial F_{11}\Lambda}{\partial\nu}-\frac{3M_\odot}{2\pi R_\odot^4}\frac{H_T\sqrt{\nu}}{r^4\rho}\left(1+\frac{D_h}{K}\right)\Psi\right\}$$

5.3 Equation 5 (Page 2)

$$\begin{aligned}
&\frac{\epsilon+\epsilon_g}{\epsilon_m}\left\{A+\left[f_\epsilon\left(\epsilon_T-\delta\right)+\delta\right]\Psi+\left[f_\epsilon\left(\epsilon_\mu+\varphi\right)-\varphi\right]\Lambda\right\}=\\
&\nu\left\{\frac{1}{\nu}\frac{\partial\ln l}{\partial\ln m}A+\frac{1}{\nu}\frac{\partial\ln l}{\partial\ln m}\left[\left(f_\epsilon\left(\epsilon_T-\delta\right)+\delta\right)\right]\Psi+\frac{1}{\nu}\frac{\partial\ln l}{\partial\ln m}\left[\left(f_\epsilon\left(\epsilon_\mu+\varphi\right)-\varphi\right)\right]\Lambda\right\}=\\
&\nu\left\{-F_{12}\frac{\partial\Psi}{\partial\nu}+\frac{1}{\nu}\frac{\partial\ln l}{\partial\ln m}\left(f_\epsilon\left(\epsilon_T-\delta\right)+2\delta-1-\chi_{\mathrm{T}}\right)\Psi+\frac{1}{\nu}\frac{\partial\ln l}{\partial\ln m}\left(f_\epsilon\left(\epsilon_\mu+\varphi\right)-2\varphi-\chi_\mu\right)\Lambda\right\}=\\
&=\nu\left\{-F_{12}\frac{\partial\Psi}{\partial\nu}+\left(\frac{M_\odot}{L_\odot}\frac{\varepsilon_{\mathrm{nuc}}\sqrt{\nu}}{l}\left(\epsilon_T-\delta\right)+\frac{1}{\nu}\frac{\partial\ln l}{\partial\ln m}\left(2\delta-1-\chi_{\mathrm{T}}\right)\right)\Psi\right.\\
&\left.+\left(\frac{M_\odot}{L_\odot}\frac{\varepsilon_{\mathrm{nuc}}\sqrt{\nu}}{l}\left(\epsilon_\mu+\varphi\right)-\frac{1}{\nu}\frac{\partial\ln l}{\partial\ln m}\left(2\varphi+\chi_\mu\right)\right)\Lambda\right\}
\end{aligned}$$

5.4 Equation 6 (Page 2)

$$\begin{aligned}
&\frac{Mc_{\mathrm{P}}T}{L}\left(\frac{D\Psi}{Dt}+\phi\frac{D\ln\mu}{Dt}\Lambda\right)=\\
&\nu\left\{\frac{M_\odot}{L_\odot}\frac{\sqrt{\nu}c_{\mathrm{P}}T}{l\Delta t}\Psi+\frac{M_\odot}{L_\odot}\frac{\sqrt{\nu}c_{\mathrm{P}}T\phi}{l\Delta t}\left(\ln\mu-\ln\mu^t\right)\Lambda-\frac{M_\odot}{L_\odot}\frac{\sqrt{\nu}c_{\mathrm{P}}T\Psi^t}{l\Delta t}\right\}
\end{aligned}$$

5.5 Circulation méridienne

$$\begin{aligned}
0=&\frac{M_\odot}{L_\odot}\frac{g\rho c_{\mathrm{P}}T\sqrt{\nu}}{lP}\left(\nabla_{\mathrm{ad}}-\nabla\right)U\\
&+\frac{2R}{3g\nu}\left(1-\frac{\partial\ln l}{\partial\ln m}\right)\left(\frac{\mathrm{d}\ln g}{\mathrm{d}\ln R}-2\right)\Omega^2+\frac{2}{g\nu R}\frac{\mathrm{d}\ln g}{\mathrm{d}\ln R}\left(1-\frac{\partial\ln l}{\partial\ln m}\right)\Phi\\
&-\frac{2}{g\nu}\left(1-\frac{\partial\ln l}{\partial\ln m}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial R}-\frac{R}{3\pi Gg\rho\nu}\left(\frac{\mathrm{d}\ln g}{\mathrm{d}\ln R}-2\right)\Omega^4-\frac{1}{\pi Gg\rho\nu R}\frac{\mathrm{d}\ln g}{\mathrm{d}\ln R}\Omega^2\Phi\\
&+\frac{1}{\pi Gg\rho\nu}\Omega^2\frac{\partial\Phi}{\partial R}-\frac{2R^2}{9\pi Gg\rho\nu}\left(\frac{\mathrm{d}\ln g}{\mathrm{d}\ln R}-2\right)\Omega^3\frac{\partial\Omega}{\partial R}\\
&-\frac{2}{3\pi Gg\rho\nu}\frac{\mathrm{d}\ln g}{\mathrm{d}\ln R}\Omega\Phi\frac{\partial\Omega}{\partial R}+\frac{2R}{3\pi Gg\rho\nu}\Omega\frac{\partial\Omega}{\partial R}\frac{\partial\Phi}{\partial R}-\frac{8R_\odot^3}{9M_\odot G}\frac{r^3}{\nu^{\frac{3}{2}}}\Omega\frac{\partial\Omega}{\partial\nu}\\
&-\frac{\partial}{\partial\nu}\left(F_{17}\frac{\partial\Psi}{\partial\nu}\right)-\frac{\partial F_{18}\Psi}{\partial\nu}-\frac{\partial F_{11}\Lambda}{\partial\nu}+\frac{3M_\odot}{2\pi R_\odot^4}\frac{H_T\sqrt{\nu}}{r^4\rho}\left(1+\frac{D_h}{K}\right)\Psi\\
&+F_{12}\frac{\partial\Psi}{\partial\nu}-\left(\frac{M_\odot}{L_\odot}\frac{\varepsilon_{\mathrm{nuc}}\sqrt{\nu}}{l}\left(\epsilon_T-\delta\right)+\frac{1}{\nu}\frac{\partial\ln l}{\partial\ln m}\left(2\delta-1-\chi_{\mathrm{T}}\right)\right)\Psi\\
&-\left(\frac{M_\odot}{L_\odot}\frac{\varepsilon_{\mathrm{nuc}}\sqrt{\nu}}{l}\left(\epsilon_\mu+\varphi\right)-\frac{1}{\nu}\frac{\partial\ln l}{\partial\ln m}\left(2\varphi+\chi_\mu\right)\right)\Lambda
\end{aligned}$$

$$+\frac{M_\odot}{L_\odot}\frac{\sqrt{\nu}c_\mathrm{P}T}{l\Delta t}\Psi+\frac{M_\odot}{L_\odot}\frac{\sqrt{\nu}c_\mathrm{P}T\phi}{l\Delta t}\left(\ln\mu-\ln\mu^t\right)\Lambda-\frac{M_\odot}{L_\odot}\frac{\sqrt{\nu}c_\mathrm{P}T\Psi^t}{l\Delta t}$$

5.5.1 Regroupement

$$
\begin{aligned}
0 = &-\frac{R}{3\pi G g\rho\nu}\left(\frac{\mathrm{d}\ln g}{\mathrm{d}\ln R}-2\right)\Omega^4-\frac{2R^2}{9\pi G g\rho\nu}\left(\frac{\mathrm{d}\ln g}{\mathrm{d}\ln R}-2\right)\Omega^3\frac{\partial\Omega}{\partial R}\\
&+\frac{2R}{3g\nu}\left(1-\frac{\partial\ln l}{\partial\ln m}\right)\left(\frac{\mathrm{d}\ln g}{\mathrm{d}\ln R}-2\right)\Omega^2-\frac{8R_\odot^3}{9M_\odot G}\frac{r^3}{\nu^{\frac{3}{2}}}\Omega\frac{\partial\Omega}{\partial\nu}+\frac{1}{\pi G g\rho\nu}\Omega^2\frac{\partial\Phi}{\partial R}\\
&-\frac{1}{\pi G g\rho\nu R}\frac{\mathrm{d}\ln g}{\mathrm{d}\ln R}\Omega^2\Phi+\frac{2R}{3\pi G g\rho\nu}\Omega\frac{\partial\Omega}{\partial R}\frac{\partial\Phi}{\partial R}-\frac{2}{3\pi G g\rho\nu}\frac{\mathrm{d}\ln g}{\mathrm{d}\ln R}\Omega\Phi\frac{\partial\Omega}{\partial R}\\
&+\frac{2}{g\nu R}\frac{\mathrm{d}\ln g}{\mathrm{d}\ln R}\left(1-\frac{\partial\ln l}{\partial\ln m}\right)\Phi\\
&-\frac{2}{g\nu}\left(1-\frac{\partial\ln l}{\partial\ln m}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial R}-\frac{\partial F_{18}\Psi}{\partial\nu}-\frac{\partial F_{11}\Lambda}{\partial\nu}-\frac{\partial}{\partial\nu}\left(F_{17}\frac{\partial\Psi}{\partial\nu}\right)+F_{12}\frac{\partial\Psi}{\partial\nu}\\
&-\left(\frac{M_\odot}{L_\odot}\frac{\varepsilon_\mathrm{nuc}\sqrt{\nu}}{l}\left(\epsilon_T-\delta\right)+\frac{1}{\nu}\frac{\partial\ln l}{\partial\ln m}\left(2\delta-1-\chi_\mathrm{T}\right)-\frac{M_\odot}{L_\odot}\frac{\sqrt{\nu}c_\mathrm{P}T}{l\Delta t}\right.\\
&\left.-\frac{3M_\odot}{2\pi R_\odot^4}\frac{H_T\sqrt{\nu}}{r^4\rho}\left(1+\frac{D_h}{K}\right)\right)\Psi\\
&-\left(\frac{M_\odot}{L_\odot}\frac{\varepsilon_\mathrm{nuc}\sqrt{\nu}}{l}\left(\epsilon_\mu+\varphi\right)-\frac{1}{\nu}\frac{\partial\ln l}{\partial\ln m}\left(2\varphi+\chi_\mu\right)-\frac{M_\odot}{L_\odot}\frac{\sqrt{\nu}c_\mathrm{P}T\phi}{l\Delta t}\left(\ln\mu-\ln\mu^t\right)\right)\Lambda\\
&-\frac{M_\odot}{L_\odot}\frac{\sqrt{\nu}c_\mathrm{P}T\Psi^t}{l\Delta t}+\frac{M_\odot}{L_\odot}\frac{g\rho c_\mathrm{P}T\sqrt{\nu}}{lP}\left(\nabla_\mathrm{ad}-\nabla\right)U
\end{aligned}
$$

6 Equ. (21) Circulation méridienne

$$
\begin{aligned}
&F_1\Omega^4+F_2\Omega^3\frac{\partial\Omega}{\partial\nu}+F_3\Omega^2+F_4\Omega\frac{\partial\Omega}{\partial\nu}+F_5\Omega^2\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}+F_6\Omega^2\Phi+F_7\Omega\frac{\partial\Omega}{\partial\nu}\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\\
&+F_8\Omega\Phi\frac{\partial\Omega}{\partial\nu}+F_9\Phi+F_{10}\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}-\frac{\partial F_{18}\Psi}{\partial\nu}-\frac{\partial F_{11}\Lambda}{\partial\nu}-\frac{\partial}{\partial\nu}\left(F_{17}\frac{\partial\Psi}{\partial\nu}\right)+F_{12}\frac{\partial\Psi}{\partial\nu}\\
&+F_{13}\Psi+F_{14}\Lambda+F_{15}+F_{16}U=0\Longrightarrow\\
&(F_1\Omega^2+F_3)\Omega^2+(F_2\Omega^2+F_8\Phi+F_4)\Omega\frac{\partial\Omega}{\partial\nu}+(F_6\Omega^2+F_9)\Phi+F_7\Omega\frac{\partial\Omega}{\partial\nu}\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\\
&+\left(F_5\Omega^2+F_{10}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}+F_{12}\frac{\partial\Psi}{\partial\nu}+F_{13}\Psi+F_{14}\Lambda+F_{15}+F_{16}U=\\
&\frac{\partial}{\partial\nu}\left(F_{17}\frac{\partial\Psi}{\partial\nu}\right)+\frac{\partial F_{11}\Lambda}{\partial\nu}+\frac{\partial F_{18}\Psi}{\partial\nu}
\end{aligned}
$$

Les solutions faibles sont données par :

$$
\begin{aligned}
&<\Big\{(F_1\Omega^2+F_3)\Omega^2+F_{16}U+F_{13}\Psi+F_{14}\Lambda+(F_6\Omega^2+F_9)\Phi+F_{15} \qquad (7)\\
&+\left(F_2\Omega^2+F_8\Phi+F_4\right)\Omega\frac{\partial\Omega}{\partial\nu}+F_7\Omega\frac{\partial\Omega}{\partial\nu}\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}+\left(F_5\Omega^2+F_{10}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}+F_{12}\frac{\partial\Psi}{\partial\nu}\Big\}\bullet S_j^{m_c}>
\end{aligned}
$$

$$+ < \left(F_{17}\frac{\partial \Psi}{\partial \nu} + F_{11}\Lambda + F_{18}\Psi \right) \bullet \frac{\partial S_j^{m_c}}{\partial \nu} > - \left| \left(F_{17}\frac{\partial \Psi}{\partial \nu} + F_{11}\Lambda + F_{18}\Psi \right) S_j^{m_c} \right|_{\nu_c}^{\nu_s} = 0$$

6.1 Coefficients

$$F_1\Omega^4,\ F_1 = -\frac{R_\odot}{3\pi G}\frac{r}{\rho\nu g}\left(\frac{\mathrm{d}\ln g}{\mathrm{d}\ln R} - 2\right)$$

$$F_2\Omega^3\frac{\partial \Omega}{\partial \nu},\ F_2 = -\frac{16R_\odot^4}{27M_\odot G}\frac{r^4}{g\nu^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\mathrm{d}\ln g}{\mathrm{d}\ln R} - 2\right)$$

$$F_3\Omega^2, F_3 = \frac{2R_\odot}{3}\frac{r}{g\nu}\left(1 - \frac{\partial \ln l}{\partial \ln m}\right)\left(\frac{\mathrm{d}\ln g}{\mathrm{d}\ln R} - 2\right)$$

$$F_4\Omega\frac{\partial \Omega}{\partial \nu},\ F_4 = -\frac{8R_\odot^3}{9M_\odot G}\frac{r^3}{\nu^{\frac{3}{2}}}$$

$$F_5\Omega^2\frac{\partial \Phi}{\partial \nu},\ F_5 = \frac{8R_\odot^2}{3M_\odot G}\frac{r^2}{g\nu^{\frac{3}{2}}}$$

$$F_6\Omega^2\Phi, F_6 = -\frac{1}{\pi G R_\odot}\frac{1}{g\rho\nu r}\frac{\mathrm{d}\ln g}{\mathrm{d}\ln R}$$

$$F_7\Omega\frac{\partial \Omega}{\partial \nu}\frac{\partial \Phi}{\partial \nu},\ F_7 = \frac{128\pi R_\odot^5}{27M_\odot^2 G}\frac{r^5\rho}{g\nu^2}$$

$$F_8\Omega\Phi\frac{\partial \Omega}{\partial \nu},\ F_8 = -\frac{16R_\odot^2}{9M_\odot G}\frac{r^2}{g\nu^{\frac{3}{2}}}\frac{\mathrm{d}\ln g}{\mathrm{d}\ln R}$$

$$F_9\Phi,\ F_9 = \frac{2}{R_\odot}\frac{1}{g\nu r}\frac{\mathrm{d}\ln g}{\mathrm{d}\ln R}\left(1 - \frac{\partial \ln l}{\partial \ln m}\right)$$

$$F_{10}\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}, F_{10} = -\frac{16\pi R_\odot^2}{3M_\odot}\frac{r^2\rho}{g\nu^{\frac{3}{2}}}\left(1 - \frac{\partial \ln l}{\partial \ln m}\right)$$

$$\frac{\partial F_{11}\Lambda}{\partial \nu}, F_{11} = -\frac{2}{3}(\varphi + \chi_\mu)$$

$$F_{12}\frac{\partial \Psi}{\partial \nu},\ F_{12} = -\frac{8\pi R_\odot^2}{3M_\odot}\frac{r^2\rho H_\mathrm{T}}{\nu^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial \ln l}{\partial \ln m}$$

$$F_{13}\Psi,\ F_{13} = -\left(\frac{M_\odot}{L_\odot}\frac{\varepsilon_\mathrm{nuc}\sqrt{\nu}}{l}(\epsilon_T - \delta) + \frac{1}{\nu}\frac{\partial \ln l}{\partial \ln m}(2\delta - 1 - \chi_\mathrm{T}) - \frac{M_\odot}{L_\odot}\frac{\sqrt{\nu}c_\mathrm{P}T}{l\Delta t}\right.$$
$$\left. -\frac{3M_\odot}{2\pi R_\odot^4}\frac{H_T\sqrt{\nu}}{r^4\rho}\left(1 + \frac{D_h}{K}\right)\right)$$

$$F_{14}\Lambda,\ F_{14} = -\left(\frac{M_\odot}{L_\odot}\frac{\varepsilon_\mathrm{nuc}\sqrt{\nu}}{l}(\epsilon_\mu + \varphi) - \frac{1}{\nu}\frac{\partial \ln l}{\partial \ln m}(2\varphi + \chi_\mu) - \frac{M_\odot}{L_\odot}\frac{\sqrt{\nu}c_\mathrm{P}T\phi}{l\Delta t}\left(\ln\mu - \ln\mu^t\right)\right)$$

$$F_{15},\ F_{15} = -\frac{M_\odot}{L_\odot}\frac{\sqrt{\nu}c_\mathrm{P}T\Psi^t}{l\Delta t}$$

$$F_{16}U,\ F_{16} = \frac{M_\odot}{L_\odot}\frac{g\rho c_\mathrm{P}T\sqrt{\nu}}{lP}(\nabla_\mathrm{ad} - \nabla)$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\left(F_{17}\frac{\partial \Psi}{\partial \nu}\right),\ F_{17} = \frac{16\pi R_\odot^2}{9M_\odot}\frac{r^2\rho H_\mathrm{T}}{\sqrt{\nu}}$$

$$\frac{\partial F_{18}\Psi}{\partial\nu},\ F_{18}=-\frac{2}{3}(1-\delta+\chi_{\mathrm{T}})$$

7 Coefficients déduits des relations de Andy

$$F_1=\frac{8R_\odot^4}{9GM_\odot}\frac{r^4}{g\nu^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial\ln g}{\partial\nu}-\frac{2R_\odot}{3\pi G}\frac{r}{\rho g\nu},\ F_2=\frac{128\pi R_\odot^7}{81GM_\odot^2}\frac{r^7\rho}{g\nu^2}\frac{\partial\ln g}{\partial\nu}-\frac{32R_\odot^4}{27GM_\odot}\frac{r^4}{g\nu^{\frac{3}{2}}}$$

$$F_3=\left(\frac{4R_\odot}{3}\frac{r}{g\nu}-\frac{16\pi R_\odot^4}{9M_\odot}\frac{r^4\rho}{g\nu^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial\ln g}{\partial\nu}\right)\left(1-\frac{\partial\ln l}{\partial\ln m}\right),\ F_4=-\frac{8R_\odot^3}{9GM_\odot}\frac{r^3}{\nu^{\frac{3}{2}}}$$

$$F_5=-\frac{8R_\odot^2}{3GM_\odot}\frac{r^2}{g\nu^{\frac{3}{2}}},\ F_6=\frac{8R_\odot^2}{3GM_\odot}\frac{r^2}{g\nu^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial\ln g}{\partial\nu},\ F_7=-\frac{128\pi R_\odot^5}{27GM_\odot^2}\frac{r^5\rho}{g\nu^2},$$

$$F_8=\frac{128\pi R_\odot^5}{27GM_\odot^2}\frac{r^5\rho}{g\nu^2}\frac{\partial\ln g}{\partial\nu},\ F_9=-\frac{16\pi R_\odot^2}{3M_\odot}\frac{r^2\rho}{g\nu^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial\ln g}{\partial\nu}\left(1-\frac{\partial\ln l}{\partial\ln m}\right),$$

$$F_{10}=\frac{16\pi R_\odot^2}{3M_\odot}\frac{r^2\rho}{g\nu^{\frac{3}{2}}}\left(1-\frac{\partial\ln l}{\partial\ln m}\right),$$

$$F_{13}=\frac{M_\odot}{L_\odot}\frac{\epsilon_{\mathrm{nuc}}\left(\epsilon_{\mathrm{T}}-\delta\right)\sqrt{\nu}}{l}+\frac{\delta}{\nu}\frac{\partial\ln l}{\partial\ln m}-\frac{3M_\odot}{2\pi R_\odot^4}\frac{\sqrt{\nu}H_{\mathrm{T}}}{\rho r^4}\left(1+\frac{D_{\mathrm{h}}}{K}\right)-\frac{M_\odot}{L_\odot}\frac{\sqrt{\nu}C_{\mathrm{P}}T}{l\Delta t}$$
$$-\frac{1-\delta+\chi_{\mathrm{T}}}{\nu}\frac{\partial\ln l}{\partial\ln m},$$

$$F_{14}=\frac{M_\odot}{L_\odot}\frac{\epsilon_{\mathrm{nuc}}\left(\epsilon_\mu+\varphi\right)\sqrt{\nu}}{l}-\frac{\varphi}{\nu}\frac{\partial\ln l}{\partial\ln m}-\frac{M_\odot}{L_\odot}\frac{C_{\mathrm{P}}T\sqrt{\nu}\phi}{l}\frac{\ln\mu-\ln\mu^t}{\Delta t}-\frac{\varphi+\chi_\mu}{\nu}\frac{\partial\ln l}{\partial\ln m},$$

$$F_{15}=\frac{M_\odot}{L_\odot}\frac{C_pT\Psi^t\sqrt{\nu}}{l\Delta t},\ F_{16}=-\frac{M_\odot}{L_\odot}\frac{g\rho C_{\mathrm{P}}T\left(\nabla_{\mathrm{ad}}-\nabla\right)\sqrt{\nu}}{lP}.$$

7.1 Circulation méridienne avec γ

$$\begin{aligned}
0=&\frac{M_\odot}{L_\odot}\frac{g\rho c_{\mathrm{P}}T\sqrt{\nu}}{lP}\left(\nabla_{\mathrm{ad}}-\nabla\right)U\\
&+\frac{8R_\odot^3}{3GM_\odot}\frac{r^3}{\nu^{\frac{5}{2}}}\left(1-\frac{\partial\ln l}{\partial\ln m}\right)\Omega^2-\frac{4R_\odot^3}{3\pi G^2M_\odot}\frac{r^3}{\rho\nu^{\frac{5}{2}}}\Omega^4-\frac{64R_\odot^6}{27G^2M_\odot^2}\frac{r^6}{\nu^3}\Omega^3\frac{\partial\Omega}{\partial\nu}\\
&-\frac{8R_\odot^3}{9M_\odot G}\frac{r^3}{\nu^{\frac{3}{2}}}\Omega\frac{\partial\Omega}{\partial\nu}\\
&-\frac{\partial}{\partial\nu}\left(F_{17}\frac{\partial\Psi}{\partial\nu}\right)-\frac{\partial F_{18}\Psi}{\partial\nu}-\frac{\partial F_{11}\Lambda}{\partial\nu}+\frac{3M_\odot}{2\pi R_\odot^4}\frac{H_T\sqrt{\nu}}{r^4\rho}\left(1+\frac{D_h}{K}\right)\Psi\\
&F_{12}\frac{\partial\Psi}{\partial\nu}-\left(\frac{M_\odot}{L_\odot}\frac{\varepsilon_{\mathrm{nuc}}\sqrt{\nu}}{l}\left(\epsilon_T-\delta\right)+\frac{1}{\nu}\frac{\partial\ln l}{\partial\ln m}\left(2\delta-1-\chi_{\mathrm{T}}\right)\right)\Psi\\
&-\left(\frac{M_\odot}{L_\odot}\frac{\varepsilon_{\mathrm{nuc}}\sqrt{\nu}}{l}\left(\epsilon_\mu+\varphi\right)-\frac{1}{\nu}\frac{\partial\ln l}{\partial\ln m}\left(2\varphi+\chi_\mu\right)\right)\Lambda\\
&+\frac{M_\odot}{L_\odot}\frac{\sqrt{\nu}c_{\mathrm{P}}T}{l\Delta t}\Psi+\frac{M_\odot}{L_\odot}\frac{\sqrt{\nu}c_{\mathrm{P}}T\phi}{l\Delta t}\left(\ln\mu-\ln\mu^t\right)\Lambda-\frac{M_\odot}{L_\odot}\frac{\sqrt{\nu}c_{\mathrm{P}}T\Psi^t}{l\Delta t}
\end{aligned}$$

7.2 Regroupement avec γ

$$
\begin{aligned}
&+\frac{8R_\odot^3}{3GM_\odot}\frac{r^3}{\nu^{\frac{5}{2}}}\left(1-\frac{\partial\ln l}{\partial\ln m}\right)\Omega^2-\frac{4R_\odot^3}{3\pi G^2M_\odot}\frac{r^3}{\rho\nu^{\frac{5}{2}}}\Omega^4\\
&-\frac{64R_\odot^6}{27G^2M_\odot^2}\frac{r^6}{\nu^3}\Omega^3\frac{\partial\Omega}{\partial\nu}-\frac{8R_\odot^3}{9M_\odot G}\frac{r^3}{\nu^{\frac{3}{2}}}\Omega\frac{\partial\Omega}{\partial\nu}\\
&-\frac{\partial F_{18}\Psi}{\partial\nu}-\frac{\partial F_{11}\Lambda}{\partial\nu}-\frac{\partial}{\partial\nu}\left(F_{17}\frac{\partial\Psi}{\partial\nu}\right)+F_{12}\frac{\partial\Psi}{\partial\nu}\\
&-\left(\frac{M_\odot}{L_\odot}\frac{\varepsilon_{\rm nuc}\sqrt{\nu}}{l}(\epsilon_T-\delta)+\frac{1}{\nu}\frac{\partial\ln l}{\partial\ln m}(2\delta-1-\chi_{\rm T})-\frac{M_\odot}{L_\odot}\frac{\sqrt{\nu}c_{\rm P}T}{l\Delta t}\right.\\
&\left.-\frac{3M_\odot}{2\pi R_\odot^4}\frac{H_T\sqrt{\nu}}{r^4\rho}\left(1+\frac{D_h}{K}\right)\right)\Psi\\
&-\left(\frac{M_\odot}{L_\odot}\frac{\varepsilon_{\rm nuc}\sqrt{\nu}}{l}(\epsilon_\mu+\varphi)-\frac{1}{\nu}\frac{\partial\ln l}{\partial\ln m}(2\varphi+\chi_\mu)-\frac{M_\odot}{L_\odot}\frac{\sqrt{\nu}c_{\rm P}T\phi}{l\Delta t}\left(\ln\mu-\ln\mu^t\right)\right)\Lambda\\
&-\frac{M_\odot}{L_\odot}\frac{\sqrt{\nu}c_{\rm P}T\Psi^t}{l\Delta t}+\frac{M_\odot}{L_\odot}\frac{g\rho c_{\rm P}T\sqrt{\nu}}{lP}(\nabla_{\rm ad}-\nabla)U
\end{aligned}
$$

7.3 Equ. (21) Circulation méridienne avec γ

$$
\begin{aligned}
0=&F_{39}\Omega^2+F_{40}\Omega^4+F_{41}\Omega^3\frac{\partial\Omega}{\partial\nu}+F_4\Omega\frac{\partial\Omega}{\partial\nu}+F_{13}\Psi+F_{14}\Lambda+F_{15}+F_{16}U+F_{12}\frac{\partial\Psi}{\partial\nu}\\
&-\frac{\partial}{\partial\nu}\left(F_{18}\Psi+F_{17}\frac{\partial\Psi}{\partial\nu}+F_{11}\Lambda\right)
\end{aligned}
$$

Les solutions faibles sont données par :

$$
\begin{aligned}
&<\left(\left[F_{39}+F_{40}\Omega^2\right]\Omega^2+\left[F_4+F_{41}\Omega^2\right]\Omega\frac{\partial\Omega}{\partial\nu}+F_{16}U+F_{13}\Psi+F_{12}\frac{\partial\Psi}{\partial\nu}+F_{14}\Lambda+F_{15}\right)\bullet S_j^{m_c}>\\
&+<\left(F_{18}\Psi+F_{17}\frac{\partial\Psi}{\partial\nu}+F_{11}\Lambda\right)\bullet\frac{\partial S_j^{m_c}}{\partial\nu}>-\left|\left(F_{18}\Psi+F_{17}\frac{\partial\Psi}{\partial\nu}+F_{11}\Lambda\right)S_j^{m_c}\right|_{\nu_{\rm c}}^{\nu_{\rm s}}=0\\
&F_{39}=\frac{8R_\odot^3}{3GM_\odot}\frac{r^3}{\nu^{\frac{5}{2}}}\left(1-\frac{\partial\ln l}{\partial\ln m}\right),\ F_{40}=-\frac{4R_\odot^3}{3\pi G^2M_\odot}\frac{r^3}{\rho\nu^{\frac{5}{2}}},\ F_{41}=-\frac{64R_\odot^6}{27G^2M_\odot^2}\frac{r^6}{\nu^3}
\end{aligned}
$$

8 Equ.(24) Relation barocline

$$
\begin{aligned}
&\Theta=\frac{R^2}{3g}\frac{\partial\Omega^2}{\partial R}=\frac{2R^2}{3g}\Omega\frac{\partial\Omega}{\partial R}=\varphi\Lambda-\delta\Psi\Longrightarrow\\
&\frac{16\pi R_\odot^4}{9M_\odot}\frac{r^4\rho}{g\sqrt{\nu}}\Omega\frac{\partial\Omega}{\partial\nu}-\varphi\Lambda+\delta\Psi=0\Longrightarrow\\
&<\left(F_{19}\Omega\frac{\partial\Omega}{\partial\nu}+F_{20}\Lambda+F_{21}\Psi\right)\bullet S_j^{m_c}>=0\\
&F_{19}=\frac{16\pi R_\odot^4}{9M_\odot}\frac{r^4\rho}{g\sqrt{\nu}},\ F_{20}=-\varphi,\ F_{21}=\delta
\end{aligned}
\tag{8}
$$

9 Equ. (26) Fluctuations du poids moléculaire

$$\frac{D\Lambda}{Dt} + \left(\frac{6D_\mathrm{h}}{R^2} - \frac{D\ln\mu}{Dt}\right)\Lambda - \frac{U\nabla_\mu}{H_\mathrm{P}} = 0 \Longrightarrow \tag{9}$$

$$< (F_{22}U + F_{23}\Lambda + F_{24}) \bullet S_j^{m_c} >= 0$$

$$F_{22} = -\frac{\nabla_\mu}{H_\mathrm{P}},\ F_{23} = \left(\frac{6}{R_\odot^2}\frac{D_\mathrm{h}}{r^2} - \frac{\ln\mu - \ln\mu^t - 1}{\Delta t}\right),\ F_{24} = -\frac{\Lambda^t}{\Delta t} \tag{10}$$

10 Equ.(33) Poisson

$$0 = \frac{1}{R}\frac{\partial^2 R\Phi}{\partial R^2} - \left(\frac{6}{R^2} + \frac{4\pi G}{g}\frac{\partial\rho}{\partial R}\right)\Phi + \frac{8\pi G}{3}\frac{\rho R}{g}\Omega^2 - \frac{4\pi G}{3g}\frac{\partial}{\partial R}\left(\rho R^2\Omega^2\right)$$

$$\frac{1}{R}\frac{\partial^2 R\Phi}{\partial R^2} = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(\Phi + R\frac{\partial\Phi}{\partial R}\right)$$

$$\frac{8\pi G}{3}\frac{\rho R}{g}\Omega^2 - \frac{4\pi G}{3g}\frac{\partial}{\partial R}\left(\rho R^2\Omega^2\right) =$$

$$\frac{4\pi G}{3g}2R\rho\Omega^2 - \frac{4\pi G}{3g}\left(2R\rho + R^2\frac{\partial\rho}{\partial R}\right)\Omega^2 - \frac{8\pi G}{3g}\rho R^2\Omega\frac{\partial\Omega}{\partial R} =$$

$$-\frac{4\pi G}{3}\frac{R^2\rho}{g}\frac{\partial\ln\rho}{\partial R}\Omega^2 - \frac{8\pi G}{3}\frac{\rho R^2}{g}\Omega\frac{\partial\Omega}{\partial R} \Longrightarrow$$

$$0 = \frac{8\pi R_\odot}{3M_\odot}\frac{r\rho}{\sqrt{\nu}}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\Phi + \frac{8\pi R_\odot^3}{3M_\odot}\frac{r^3\rho}{\sqrt{\nu}}\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\right) - \left(\frac{6}{R_\odot^2 r^2} + \frac{32\pi^2 R_\odot^2 G}{3M_\odot}\frac{r^2\rho^2}{g\sqrt{\nu}}\frac{\partial\ln\rho}{\partial\nu}\right)\Phi$$

$$-\frac{32\pi^2 R_\odot^4 G}{9M_\odot}\frac{r^4\rho^2}{g\sqrt{\nu}}\frac{\partial\ln\rho}{\partial\nu}\Omega^2 - \frac{64\pi^2 R_\odot^4 G}{9M_\odot}\frac{r^4\rho^2}{g\sqrt{\nu}}\Omega\frac{\partial\Omega}{\partial\nu}$$

en multipliant par :

$$\frac{3M_\odot}{8\pi R_\odot}\frac{\sqrt{\nu}}{r\rho}$$

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\Phi + \frac{8\pi R_\odot^3}{3M_\odot}\frac{r^3\rho}{\sqrt{\nu}}\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\right) - \left(\frac{9M_\odot}{4\pi R_\odot^3}\frac{\sqrt{\nu}}{r^3\rho} + 4\pi R_\odot G\frac{r\rho}{g}\frac{\partial\ln\rho}{\partial\nu}\right)\Phi$$

$$-\frac{4\pi R_\odot^3 G}{3}\frac{r^3\rho}{g}\frac{\partial\ln\rho}{\partial\nu}\Omega^2 - \frac{8\pi R_\odot^3 G}{3}\frac{r^3\rho}{g}\Omega\frac{\partial\Omega}{\partial\nu} = 0$$

L'équation de Poisson se ramène à :

$$F_{29}\Omega^2 + F_{28}\Omega\frac{\partial\Omega}{\partial\nu} + F_{27}\Phi = \frac{\partial}{\partial\nu}\left(\Phi + F_{25}\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\right) \Longrightarrow \tag{11}$$

$$< \left(F_{29}\Omega^2 + F_{28}\Omega\frac{\partial\Omega}{\partial\nu} + F_{27}\Phi\right) \bullet S_j^{m_c} > + < \left(\Phi + F_{25}\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\right) \bullet \frac{\partial S_j^{m_c}}{\partial\nu} >$$

$$-\left|\left(\Phi + F_{25}\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\right) S_j^{m_c}\right|_{\nu_\mathrm{c}}^{\nu_\mathrm{s}} = 0$$

$$F_{25} = \frac{8\pi R_\odot^3}{3M_\odot}\frac{r^3\rho}{\sqrt{\nu}},\ F_{27} = \frac{9M_\odot}{4\pi R_\odot^3}\frac{\sqrt{\nu}}{r^3\rho} + 4\pi G R_\odot \frac{r\rho}{g}\frac{\partial \ln \rho}{\partial \nu},\ F_{28} = \frac{8\pi G R_\odot^3}{3}\frac{r^3\rho}{g},$$
$$F_{29} = \frac{4\pi R_\odot^3 G}{3}\frac{r^3\rho}{g}\frac{\partial \ln\rho}{\partial \nu}$$

10.1 Transport du moment cinétique

Dans une zone radiative, le moment cinétique par unité de masse :

$$\rho\frac{DR^2\Omega}{Dt} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left[R^4\rho\left(\frac{\Omega U}{5} + D_{\rm v}\frac{\partial\Omega}{\partial R}\right)\right] - \rho\dot{\mathcal{M}}_\Omega \Rightarrow \tag{12}$$
$$R_\odot^2\frac{Dr^2\Omega}{Dt} = \frac{8\pi R_\odot^6 r^2\rho}{3M_\odot R_\odot^2 r^2\rho\sqrt{\nu}}\frac{\partial}{\partial\nu}\left[r^4\rho\left(\frac{\Omega U}{5} + \frac{8\pi R_\odot^2 r^2\rho D_{\rm v}}{3M_\odot\sqrt{\nu}}\frac{\partial\Omega}{\partial\nu}\right)\right] - \dot{\mathcal{M}}_\Omega \Rightarrow$$
$$\frac{Dr^2\Omega}{Dt} = \frac{8\pi R_\odot^2}{3M_\odot\sqrt{\nu}}\frac{\partial}{\partial\nu}\left[r^4\rho\left(\frac{\Omega U}{5} + \frac{8\pi R_\odot^2 r^2\rho}{3M_\odot\sqrt{\nu}}D_{\rm v}\frac{\partial\Omega}{\partial\nu}\right)\right] - \frac{\dot{\mathcal{M}}_\Omega}{R_\odot^2} \Rightarrow$$
$$\sqrt{\nu}\frac{Dr^2\Omega}{Dt} = \frac{8\pi R_\odot^2}{15M_\odot}\frac{\partial}{\partial\nu}(r^4\rho\Omega U) + \frac{64\pi^2 R_\odot^4}{9M_\odot^2}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{r^6\rho^2 D_{\rm v}}{\sqrt{\nu}}\frac{\partial\Omega}{\partial\nu}\right) - \frac{\dot{\mathcal{M}}_\Omega\sqrt{\nu}}{R_\odot^2}$$

L'intégration par éléments finis prend la forme :

$$\begin{aligned} &< \sqrt{\nu}\left(\frac{r^2\Omega}{\Delta t} - \frac{r^2(t)\Omega(t)}{\Delta t} + \frac{\dot{\mathcal{M}}_\Omega}{R_\odot^2}\right)\bullet S_j^{m_c} > \\ &+ < \left(\frac{8\pi R_\odot^2}{15M_\odot}r^4\rho\Omega U + \frac{64\pi^2 R_\odot^4}{9M_\odot^2}\frac{r^6\rho^2 D_{\rm v}}{\sqrt{\nu}}\frac{\partial\Omega}{\partial\nu}\right)\bullet\frac{\partial S_j^{m_c}}{\partial\nu} > \\ &- \left|\left(\frac{8\pi R_\odot^2}{15M_\odot}r^4\rho\Omega U + \frac{64\pi^2 R_\odot^4}{9M_\odot^2}\frac{r^6\rho^2 D_{\rm v}}{\sqrt{\nu}}\frac{\partial\Omega}{\partial\nu}\right) S_j^{m_c}\right|_{\nu_{\rm c}}^{\nu_{\rm s}} = 0 \end{aligned}$$

Avec les notations des algorithmes, les équations s'écrivent :

$$\begin{aligned} < (F_{26}\Omega - F_{30})\bullet S_j^{m_c} > + < \left(F_{31}\Omega U + F_{32}\frac{\partial\Omega}{\partial\nu}\right)\bullet\frac{\partial S_j^{m_c}}{\partial\nu} > \\ - \left|\left(F_{31}U\Omega + F_{32}\frac{\partial\Omega}{\partial\nu}\right) S_j^{m_c}\right|_{\nu_{\rm c}}^{\nu_{\rm s}} = 0 \end{aligned} \tag{13}$$
$$F_{26} = \frac{r^2\sqrt{\nu}}{\Delta t},\ F_{30} = (F_1^* + F_2^*)\sqrt{\nu},\ F_1^* = \frac{r^2(t)\Omega(t)}{\Delta t},\ F_2^* = -\frac{\dot{\mathcal{M}}_\Omega}{R_\odot^2}$$
$$F_{31} = \frac{8\pi R_\odot^2}{15M_\odot}r^4\rho,\ F_{32} = \frac{64\pi^2 R_\odot^4}{9M_\odot^2}\frac{r^6\rho^2 D_{\rm v}}{\sqrt{\nu}}$$

10.2 Les conditions physiques dans les zones mélangées

Les zones mélangées, *i.e.* zones convectives éventuellement overshootées, apparaissent, disparaissent au cours de l'évolution. On admet que dans ces zones le mélange uniformise la vitesse angulaire, c'est la rotation solide. La notion de circulation méridienne n'y ayant pas de sens physique, est posée nulle. Le taux de fluctuation du potentiel gravitationnel Φ y satisfait l'équation de Poisson, Eq. 11 (Page 9).

On suppose que les fluctuation de température et de poids moléculaire moyen sont nulles le long d'une isobare, ainsi :

$$\frac{\partial\Omega}{\partial R} = 0,\ U = 0,\ \Psi = 0,\ \Lambda = 0. \tag{14}$$

Aux limites zone radiative / zone convective, la vitesse angulaire Ω et le taux de fluctuation du potentiel gravitationnel Φ sont des fonctions continues; la vitesse de circulation méridienne, les taux de fluctuation de la température Ψ et du poids moléculaire moyen Λ sont des fonctions discontinues. D'où la nécessité d'introduire des limites internes mobiles et en nombre variable, ce qui complique l'intégration numérique. Grâce à un choix *ad hoc* des bases de B-splines utilisées pour la diffusion du moment cinétique, les discontinuités sont implicitement prises en compte par CESAM2k, *cf.* § **??** (Page **??**). Une alternative se présente :

- ***Le modèle est totalement convectif***, à l'image de ce qui est fait pour la diffusion des espèces chimiques, on contourne l'aspect intégral en uniformisant la vitesse angulaire par une diffusion permettant de conserver globalement le moment cinétique. Pour ce faire, on impose des coefficients de diffusion dont l'ordre de grandeur, grand devant l'unité, correspond au temps de retournement des éléments convectifs. Cette modélisation simule un mélange turbulent efficace. Les équations à résoudre sont alors les suivantes :

$$\begin{aligned}
&< (F_{26}\Omega - F_{30}) \bullet S_j^{m_c} > + < F_{32}\frac{\partial\Omega}{\partial\nu} \bullet \frac{\partial S_j^{m_c}}{\partial\nu} > - \left| F_{32}\frac{\partial\Omega}{\partial\nu} S_j^{m_c} \right|_{\nu_c}^{\nu_s} = 0 \\
&< U \bullet S_j^{m_c} >= 0,\ < \Psi \bullet S_j^{m_c} >= 0,\ < \Lambda \bullet S_j^{m_c} >= 0, \\
&< \left(F_{29}\Omega^2 + F_{27}\Phi + F_{28}\Omega\frac{\partial\Omega}{\partial\nu} \right) \bullet S_j^{m_c} > + < \left(\Phi + F_{25}\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} \right) \bullet \frac{\partial S_j^{m_c}}{\partial\nu} > \\
&- \left| \left(\Phi + F_{25}\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} \right) S_j^{m_c} \right|_{\nu_c}^{\nu_s} = 0.
\end{aligned}$$

  Les deux conditions limites, au centre et à la surface, pour les équations de transport du moment cinétique, et de Poisson s'introduisent naturellement dans les parties intégrées. C'est la situation la plus simple, aucune discontinuité ne devant être introduite dans le vecteur nodal.

- ***Au moins une zone radiative est présente***, comme précédemment, dans la ou les zones convectives, l'uniformisation de la vitesse angulaire est effectuée par une diffusion. Contrairement au cas totalement convectif, le moment cinétique n'est pas globalement conservé en tant que tel. Sa variation temporelle dans chaque zone convective est supposée advectée dans la circulation méridienne des zones radiatives adjacentes.
  A la limite R d'une zone mélangée localisée dans un intervalle $[R_1, R]$, la vitesse de circulation méridienne vérifie (Mathis & Zahn [**?**]) :

$$\int_{R_1}^{R} \left(\frac{D}{Dt} R^4\rho\Omega + R^2\rho\dot{\mathcal{M}}_\Omega \right) dR = \left| \frac{1}{5} R^4 \rho\Omega U \right|_{R_1}^{R}, \tag{15}$$

différence entre les quantités d'énergie entrant et sortant de la zone mélangée par unité de temps. On a donc :

$$\frac{D}{Dt}R^4\rho\Omega + R^2\rho\dot{\mathcal{M}}_\Omega = \frac{1}{5}\frac{\partial}{\partial R}R^4\rho\Omega U \tag{16}$$

La résolution de cette équation conduit à la connaissance de la valeur de la vitesse de circulation méridienne coté radiatif des limites zone radiative / zone convective. Comme le montre l'équation 15 (Page 11), U doit être affecté du signe $+$ à la "sortie" d'une zone convective et du signe $-$ à son "entrée" (Mathis & Zahn [?]).
Du point de vue algorithmique, la vitesse de circulation méridienne n'intervenant pas dans le processus de mélange par diffusion, pour résoudre l'équation 16 (Page 12), CESAM$2k$ n'introduit pas de variable supplémentaire mais utilise celle attachée à U. Pour la suite, cette variable, dénuée de sens physique, sera notée $U_{\rm f}$ pour la distinguer de la vitesse de circulation méridienne U, nulle dans une zone convective.

Les équations sont discrétisées comme suit :

$$\frac{D}{Dt}R^4\rho\Omega + R^2\rho\dot{\mathcal{M}}_\Omega = \frac{1}{5}\frac{\partial}{\partial R}R^4\rho\Omega U \Rightarrow R_\odot^4\frac{D}{Dt}r^4\rho\Omega + R_\odot^2 r^2\rho\dot{\mathcal{M}}_\Omega = \frac{8\pi R_\odot^6}{15M_\odot}\frac{r^2\rho}{\sqrt{\nu}} \Rightarrow$$
$$\sqrt{\nu}\frac{D}{Dt}r^2\Omega + \frac{\sqrt{\nu}\Omega}{\rho}\frac{D}{Dt}r^2\rho + \sqrt{\nu}\frac{\dot{\mathcal{M}}_\Omega}{R_\odot^2} = \frac{8\pi R_\odot^6}{15M_\odot}\frac{r^2\rho}{\sqrt{\nu}} \Rightarrow$$
$$\sqrt{\nu}\left(\frac{r^2\Omega}{\Delta t} - \frac{r^2(t)\Omega(t)}{\Delta t} + \frac{\dot{\mathcal{M}}_\Omega}{R_\odot^2}\right) + \frac{\sqrt{\nu}\Omega}{\rho}\left(\rho\frac{D}{Dt}r^2 + r^2\frac{D}{Dt}\rho\right) = \frac{8\pi R_\odot^6}{15M_\odot}\frac{r^2\rho}{\sqrt{\nu}}$$

En tenant compte du fait que le gradient de composition chimique est nul dans une zone convective :

$$\frac{D\ln\rho}{Dt} = \alpha\frac{D\ln P}{Dt} - \delta\frac{D\ln T}{Dt} + \varphi\frac{D\ln\mu}{Dt} = (\alpha - \delta\nabla)\frac{D\ln P}{Dt} \Rightarrow$$
$$\frac{\sqrt{\nu}}{\Delta t}\left[r^2\left\{2 + (\alpha - \delta\nabla)(\ln P - \ln P(t))\right\} - r^2(t)\right]\Omega$$
$$-\sqrt{\nu}\left(\frac{r^2(t)\Omega(t)}{\Delta t} - \frac{\dot{\mathcal{M}}_\Omega}{R_\odot^2}\right) = \frac{8\pi R_\odot^6}{15M_\odot}\frac{r^2\rho}{\sqrt{\nu}}$$

Les équations 8 (Page 8) et 9 (Page 9) montrent que les discontinuités de $\frac{\partial\Omega}{\partial\nu}$ et U, aux limites zone radiative / zone convective, entraînent celles de Ψ et de Λ.
La densité ρ apparait dans l'expresion du coefficient de la dérivée seconde de Φ dans l'équation 11 (Page 9), vérifiée par la fluctuation du potentiel gravitationnel. La discontinuité de ρ aux limites zones radiatives / zones convectives, implique que Φ soit une fonction continue non dérivable en ces points.

En résumé, aux limites zone radiative / zone convective :

- Ω est une fonction continue non dérivable,

– U, prolongeant U_f, devient une fonction continue,

– Ψ, Λ sont des fonctions discontinues,

– Φ est une fonction continue non dérivable.

Pour la diffusion du moment cinétique CESAM$2k$ utilise un vecteur nodal discontinu à chaque limite zone radiative / zone convective; la continuité de Ω, U et Φ étant réalisée en assurant, pour les B-splines concernées, l'égalité de leurs coefficients de part et d'autre de chaque discontinuité, *cf.* § **??** (Page **??**).

Avec les notations des algorithmes dans une zone mélangée d'un modèle non totalement convectif, les équations s'écrivent :

$$
\begin{aligned}
&< (F_{26}\Omega - F_{30}) \bullet S_j^{m_c} > + < F_{32}\frac{\partial \Omega}{\partial \nu} \bullet \frac{\partial S_j^{m_c}}{\partial \nu} > - \left| F_{32}\frac{\partial \Omega}{\partial \nu} S_j^{m_c} \right|_{\nu_\mathrm{c}}^{\nu_\mathrm{s}} = 0 \\
&< (F_{35}\Omega - F_{30}) \bullet S_j^{m_c} > + < F_{31}\Omega U_\mathrm{f} \bullet \frac{\partial S_j^{m_c}}{\partial \nu} > - \left| F_{31}\Omega U_\mathrm{f} S_j^{m_c} \right|_{\nu_\mathrm{c}}^{\nu_\mathrm{s}} = 0 \\
&< \Psi \bullet S_j^{m_c} >= 0, < \Lambda \bullet S_j^{m_c} >= 0 \\
&< \left(F_{29}\Omega^2 + F_{27}\Phi + F_{28}\Omega\frac{\partial \Omega}{\partial \nu} \right) \bullet S_j^{m_c} > + < \left(\Phi + F_{25}\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \right) \bullet \frac{\partial S_j^{m_c}}{\partial \nu} > \\
&- \left| \left(\Phi + F_{25}\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \right) S_j^{m_c} \right|_{\nu_\mathrm{c}}^{\nu_\mathrm{s}} = 0 \\
&F_{35} = \frac{\sqrt{\nu}}{\Delta t} \Big(r^2 \left(2 + (\alpha - \delta\nabla) \left(\ln P - \ln P(t)\right) - r^2(t)\right) \Big).
\end{aligned}
$$

Les bornes des parties intégrées correspondent aux limites de la zone convective, *cf.* § **??** (Page **??**).
En négligeant les variations temporelles de rayon et de densité pour une même abscisse lagrangienne, l'équation vérifiée par U_f devient :

$$
< (F_{26}\Omega - F_{30}) \bullet S_j^{m_c} > + < F_{31}\Omega U_\mathrm{f} \bullet \frac{\partial S_j^{m_c}}{\partial \nu} > - \left| F_{31}\Omega U_\mathrm{f} S_j^{m_c} \right|_{\nu_\mathrm{c}}^{\nu_\mathrm{s}} = 0
$$

La continuité de la vitesse angulaire Ω et du taux de fluctuation du potentiel gravitationnel Φ aux limites zones radiatives / zones convectives, rejette les conditions limites pour ces deux équations aux extrèmités de l'intervalle d'intégration, *i.e.* au centre et à la surface

11 Continuité du flux de moment cinétique

La conservation du moment cinétique implique la continuité du flux de moment cinétique : $\mathcal{F}_{ZC} = \mathcal{F}_{ZR}$, à travers chaque limite zone radiative / zone convective. A un facteur $4\pi R_c^2$ près, le flux de moment cinétique, par unité de temps, de la zone convective vers la zone radiative adjacente, à travers la limite R_c se déduit de Eq.(**??**) :

$$
\mathcal{F}_{ZC} = \left(R^4 \rho D_\mathrm{c} \frac{\partial \Omega}{\partial R} \right)_{ZC} - \frac{1}{5} (R^4 \rho \Omega)_{ZC} \frac{\partial R_\mathrm{c}}{\partial t}, \tag{17}
$$

le second terme représente la quantité de moment cinétique balayée par le déplacement de la limite R_c pendant le temps dt. Le facteur $\frac{1}{5}$ est géométrique. Le signe $-$ provient du fait que la zone convective gagne du moment cinétique sur la zone radiative ce qui correspond à un flux entrant.

De façon analogue, le flux de moment cinétique, par unité de temps, reçu par la zone radiative adjacente se déduit de Eq.(**??**) :

$$\mathcal{F}_{ZR} = \left(R_c^4\rho\frac{\Omega U}{5} + R_c^4\rho D_{\rm v}\frac{\partial\Omega}{\partial R}\right)_{ZR} \tag{18}$$

La continuité du flux de moment cinétique implique :

$$\left(D_{\rm c}\rho\frac{\partial\Omega}{\partial R} - \frac{\rho\Omega}{5}\frac{\partial R_c}{\partial t}\right)_{ZC} = \left(\frac{\Omega\rho U}{5} + D_{\rm v}\rho\frac{\partial\Omega}{\partial R}\right)_{ZR}. \tag{19}$$

Avec diffusion micoscopique, pour une limite zone convective / zone radiative avec flux sortant, *i.e.* limite d'un cœur convectif :

$$D_{\rm c}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial R}\right)_{ZC} = \frac{\Omega}{5}\left(U + \frac{\partial R_c}{\partial t}\right) + D_{\rm v}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial R}\right)_{ZR}. \tag{20}$$

Pour une limite zone radiative / zone convective avec flux entrant, *i.e.* limite interne d'une zone convective externe :

$$-D_{\rm c}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial R}\right)_{ZC} = \frac{\Omega}{5}\left(U - \frac{\partial R_c}{\partial t}\right) + D_{\rm v}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial R}\right)_{ZR} \tag{21}$$

Sans diffusion microscopique, il y a lieu de conserver les valeurs de la densité de part et d'autre de la discontinuité. Les Eq.(20) et Eq.(21) définissent des conditions limites pour U, cotés radiatifs, d'une zone convective interne.
Une difficulté pratique est l'estimation de $\frac{\partial R_c}{\partial t}$, en particulier lors de l'apparition/disparition des zones convectives. En lagrangien les advection de moment cinétique balayées par le déplacement des limites zones radiatives / zones convectives étant implicitement prises en compte, de façon générale la condition s'écrit :

$$\pm\left(F_{33}\frac{\partial\Omega}{\partial\nu}\right)_{ZC} + \left(F_{34}U\Omega + F_{33}\frac{\partial\Omega}{\partial\nu}\right)_{ZR} = 0,\ F_{33} = \frac{40\pi R_\odot^2}{3M_\odot}\frac{r^2\rho^2 D_{\rm v}}{\sqrt{\nu}},\ F_{34} = \frac{\rho}{5}$$

le signe $-$ affecte les limites avec flux sortant, *i.e.* celle d'un noyau convectif.

11.1 Les conditions physiques aux limites

En taitant la nature intégrale du mélange convectif comme une diffusion, dans son ensemble, le transport du moment cinétique est ramené à un problème différentiel aux limites de conditions initiales. Des conditions initiales et des conditions limites doivent être précisées à chaque limite entre zone radiative et zone convective.
La diffusion du moment cinétique, *cf.* équation 12 (Page 10), est un problème aux limites du second ordre. La connaissance du profil initial de la vitesse angulaire et deux conditions limites spatiales sont nécessaires.

La vitesse de circulation méridienne, *cf.* équation 7 (Page 5), vérifie un problème aux limites du quatrième ordre. La connaissance du profil initial de la vitesse de circulation méridienne et quatre conditions limites spatiales sont requises.
Le taux de fluctuation du poids moléculaire moyen le long d'une isobare, Λ, vérifie un problème de condition initiale, *cf.* équation 9 (Page 9). Seule la dépendance spatiale initiale de Λ doit être connue.
Les conditions initiales et aux limites de la variable intermédiaire Ψ, se déduisent de celles de Ω, U et Λ, *cf.* équation 8 (Page 8).
La fluctuation du potentiel gravitationnel Φ vérifie l'équation du second ordre, 11 (Page 9). Comme il a été exposé plus avant, les deux conditions aux limites sont rejetées aux extrèmités de l'intervalle d'intégration. Mathis & Zahn [?], imposent la régularité au centre et la continuité avec un champ de potentiel à la surface.
Les conditions initiales et aux limites du système différentiel modélisant le transport des éléments chimiques ont été décrites au § **??** (Page **??**).

Le centre : ($\nu = \nu_0 = 0$), suivant l'état d'évolution le centre peut être situé dans une zone radiative ou dans une zone convective. Par raison de symétrie, la dérivée spatiale de la vitesse angulaire est nulle, ainsi que la vitesse de circulation méridienne :

$$\frac{\partial\Omega(\nu_0,t)}{\partial\nu} = 0,\ U(\nu_0,t) = 0,$$

ces conditions entraînent, *cf.* équation 8 (Page 8) :

$$\Psi(\nu_0,t) = 0.$$

Le rayon nul et l'échelle de hauteur de la pression infinie au centre entraînent, *cf.* équation 9 (Page 9) :

$$\Lambda(\nu_0,t) = 0.$$

La régularité du taux de fluctuation du potentiel gravitationnel entraîne :

$$\Phi(0,t) = 0, \quad \frac{\partial\Phi(0,t)}{\partial\nu} = 0.$$

Avec ces conditions limites, les contributions des parties intégrées des équations 7 (Page 5), 11 (Page 9) et 13 (Page 10) sont nulles en ν_0.

La surface : La partie externe de l'enveloppe, zone d'ionisation de l'hydrogène, est toujours une zone convective. L'instabilité convective s'étend dans l'atmosphère jusqu'à la limite du milieu transparent ($\tau \sim \frac{2}{3}$). Il est raisonable d'admettre que la composition chimique et la vitesse angulaire dans l'atmosphère sont celles de la zone convective externe, *cf.* § **??** (Page **??**). La borne supérieure ν_s de l'intégration spatiale du transport du moment cinétique correspondant à celle de l'enveloppe est donc toujours située dans une zone convective.
A la surface les conditions limites retenues pour Ω,U, Ψ et Λ sont :

$$\frac{\partial\Omega(\nu_\mathrm{s},t)}{\partial\nu} = 0,\ U(\nu_\mathrm{s},t) = 0,\ \Psi(\nu_\mathrm{s},t) = 0,\ \Lambda(\nu_\mathrm{s},t) = 0.$$

Avec ces conditions limites, les contributions des parties intégrées des équations 7 (Page 5) et 13 (Page 10) sont nulles en ν_s, sauf celle qui concerne U_f car rien n'impose

que $U_{\rm f}(\nu_{\rm s},t)=0$.
Selon Mathis & Zahn (2004), la continuité à la surface du taux de fluctuation du potentiel gravitationnel Φ s'écrit ($l=2,\ l+1=3$) :

$$0=\left(3\frac{\Phi}{R}+\frac{\partial\Phi}{\partial R}\right)_{R=R_{\rm ext}}\Rightarrow\Phi=-\frac{R}{3}\frac{\partial\Phi}{\partial R}$$

A la surface, la partie intégrée de l'équation 11 (Page 9) devient alors :

$$\Phi+F_{25}\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}=\left(-\frac{8\pi R_\odot^3}{9M_\odot}\frac{r^3\rho}{\sqrt{\nu}}+\frac{8\pi R_\odot^3}{3M_\odot}\frac{r^3\rho}{\sqrt{\nu}}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}=\frac{16\pi R_\odot^3}{9M_\odot}\frac{r^3\rho}{\sqrt{\nu}}\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}=\frac{2}{3}F_{25}\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}$$

Les limites zone radiative / zone convective internes : les discontinuités étant explicitement introduites, des conditions limites doivent être prises en compte aux limites zones radiatives / zones convectives.
Deux des conditions limites requises par l'équation de transport du moment cinétique, sont satisfaites en écrivant la continuité de la vitesse angulaire à travers les limites zones radiatives / zones convectives. Pour ce faire, CESAM2k remplace la relation résultant du produit scalaire avec la B-spline localisée sur la face convective de chaque limite, par la relation formée par l'égalisation des projections sur chaque B-spline située immédiatement de part et d'autre de la limite, *cf.* § **??** (Page **??**).
Pour chaque zone radiative interne deux conditions sont ainsi obtenues. Quand la zone radiative contient le centre, c'est la condition limite sur Ω qui est relevante.
De façon similaire deux autres conditions limites sont obtenues en prolongeant $U_{\rm f}$ par $\pm U$ sur chaque limite, *cf.* § 10.2 (Page 10).
Les contributions des parties intégrées de l'équation 7 (Page 5), complètent la quantité de conditions limites requises pour U.

De façon similaire, les deux conditions limites requises pour l'équation de Poisson, sont satisfaites en assurant la continuité de Φ aux limites zone radiative / zone convective.

11.2 Les conditions initiales

Des conditions initiales doivent être définies pour les variables principales qui apparaissent avec une dépendance temporelle dans les équations, à savoir : la vitesse angulaire $\Omega(0,R)$, le taux de fluctuation du poids moléculaire moyen $\Lambda(0,R)$ et les abondances des éléments chimiques $x_i(0,R)$. Pour les autres variables principales U, Ψ, et Φ, en raison de la forme implicite de la discrétisation des équations différentielles, des solutions provisoires sont nécessaires. Les conditions initiales sont établies par la routine PRIVATE `initialise_rota` du module `MOD_CESAM`.
Vitesse angulaire initiale : on ne dispose pas de données observationnelles permettant d'inférer la répartition spatiale de la vitesse angulaire d'un modèle initial de pré-séquence principale ou de séquence principale d'âge zéro. Faute de mieux, CESAM2k suppose la rotation solide. La vitesse angulaire initiale est déduite de la variable `W_ROT` du fichier de données `mon_modele.don`, *cf.* § **??** (Page **??**).
Il est toutefois possible d'utiliser un profil de rotation grossièrement similaire à celui que l'on peut inférer des observations de sismologie solaire :

$$\Omega_0(r,0)=\Omega_0\left\{1+q\left[1+\cos\left(\pi\frac{r}{R_\star}\right)\right]\right\}$$

$\Omega(0,R)$ est la vitesse angulaire initiale, éventuellement déduite de la période de rotation et du rayon total initial, *cf.* § ?? (Page ??). $q \geq -1$ est un paramètre permettant de fixer le rapport entre la vitesse angulaire au centre et à la surface, $q = 0$ correspond à une rotation rigide. q est la variable `w_form` du module `MOD_DONNEES` elle est fixée à 0. Pour utiliser une valeur différente, il convient de la redéfinir à l'aide d'un fichier de "réglages", *cf.* § ?? (Page ??). Avec $q \neq 0$, le profil de $\Omega(0,R)$ n'est pas iniformisé dans les zone convective. $\Omega(0,R)$ est initialisé dans la routine `w_initial` du module `MOD_CESAM`.

Vitesse de circulation méridienne initiale : cette quantité n'est pas accessible à l'observation. De façon euristique, dans la routine `u_initial` du module `MOD_CESAM`, $U_(0,R)$ est obtenu par la relation empirique :

$$U(0,R) = \frac{|w_{\rm rot}|u_i}{2-(R/R_\star)^2}$$

où u_i est un paramètre fixé à 10^{-4} et $w_{\rm rot}$ la valeur de la variable `W_ROT` du fichier de données `mon_modele.don`.

Taux de fluctuation du poids moléculaire moyen : la composition chimique du modèle initial étant supposé homogène, le taux de fluctuation du poids moléculaire moyen est nul à l'instant initial : $\Lambda(0,R) = 0$.

Des conditions initiales pour Ψ : sont nécessaires pour la résolution numérique, la formulation des équations étant implicite. CESAM$2k$ les calcule à partir de la relation de définition, équation 8 (Page 8), en utilisant les valeurs initiales retenues pour $\Omega(0,R)$ et $\Lambda(0,R)$.

Taux de fluctuation du potentiel gravitationnel : une approximation, pour à l'instant initial, est donnée par (Zahn 1992, Eq. 3.15) :

$$\Phi(0,R) = \frac{\mathcal{R}T}{\mu} - \frac{1}{3}R^2\Omega^2$$

où on a utilisé l'approximation gaz parfait.