29 Mars 2006.

1 Hypothèses

Dans une zone convective, on suppose que la vitesse angulaire Ω est uniformisée par une diffusion de coefficient $D_c >> 1$. Cette uniformisation est réalisée en résolvant l'équation de diffusion :

$$\rho\frac{DR^2\Omega}{Dt} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^4\rho D_{\rm c}\frac{\partial\Omega}{\partial R}\right) \tag{1}$$

Dans une zone convective, la vitesse de circulation méridienne U n'a pas de sens physique, on convient que $U \equiv 0$. Sur une limite zone radiative / zone convective, U est discontinue, la densité ρ est aussi discontinue si on ignore la diffusion microscopique, continue, non dérivable si elle est prise en compte.

Dans une zone radiative, l'équation de transport du moment cinétique comporte un terme d'advection $R^4\rho\Omega U$:

$$\rho\frac{DR^2\Omega}{Dt} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left[R^4\rho\left(\frac{\Omega U}{5} + D_{\rm v}\frac{\partial\Omega}{\partial R}\right)\right] \tag{2}$$

Les équations de diffusion de part et d'autre d'une limite zone radiative / zone convective, impliquent que la vitesse angulaire est continue sur la limite, avec une dérivée première discontinue, à cause de la discontinuité du coefficient de diffusion ($D_{\rm c} \leftrightarrow D_{\rm v}$). La discontinuité de U sur les limites zones radiatives / zones convectives, a pour conséquence la nécessité de définir une condition limite coté radiatif pour U. Depuis 1992, la relation de JPaul (Eq.103 de Mathis, Zahn 2005) :

$$\frac{D}{Dt}\left[\int_0^{R_c} r^4\rho\Omega dr\right] = \left|\frac{1}{5}r^4\rho U\right|_0^{R_c} = \frac{1}{5}R_c^4\rho U \tag{3}$$

constitue le paradigme pour la limite zone radiative / zone convective d'un noyau convectif de rayon R_c. Des signes différents et des termes supplémentaires apparaissent dans les autres situations de zone convective. Cette condition signifie que la variation temporelle de moment cinétique dans la zone convective, est advectée dans la zone radiative par l'intermédiaire de la vitesse de circulation méridienne. Dans la tachocline, U est en quelque sorte générée par une advection de moment cinétique en provenance de la zone convective.

2 Nouvelle condition limite (notes de MJo)

Le modèle précédent est discutable, en particulier, il est inapplicable, tel quel, aux limites d'une zone convective interne. Avec le formalisme développé dans les notes de MJo, l'équation de diffusion est intégrée sur le *noyau convectif* :

$$\int_0^{R_c} r^2\rho\frac{Dr^2\Omega}{Dt} = R_c^4\rho\left(\frac{\Omega U}{5} + D_{\rm v}\frac{\partial\Omega}{\partial R}\right). \tag{4}$$

Dans une zone convective, $U \equiv 0$, la présence du terme contenant U, n'est pas justifiée; la démarche proposée doit être aménagée pour mener à une valeur limite pour U, coté radiatif

3 Continuité du flux de moment cinétique

La conservation du moment cinétique implique la continuité du flux de moment cinétique : $\mathcal{F}_{ZC} = \mathcal{F}_{ZR}$, à travers chaque limite zone radiative / zone convective. A un facteur $4\pi R_c^2$ près, le flux de moment cinétique, par unité de temps, de la zone convective vers la zone radiative adjacente, à travers la limite R_c se déduit de Eq.(1) :

$$\mathcal{F}_{ZC} = \left(R^4\rho D_{\rm c}\frac{\partial\Omega}{\partial R}\right)_{ZC} - \frac{1}{5}(R^4\rho\Omega)_{ZC}\frac{\partial R_c}{\partial t}, \tag{5}$$

le second terme représente la quantité de moment cinétique balayée par le déplacement de la limite R_c pendant le temps dt. Le facteur $\frac{1}{5}$ est géométrique. Le signe $-$ provient du fait que la zone convective gagne du moment cinétique sur la zone radiative ce qui correspond à un flux entrant.

De façon analogue, le flux de moment cinétique, par unité de temps, reçu par la zone radiative adjacente se déduit de Eq.(2) :

$$\mathcal{F}_{ZR} = \left(R_c^4\rho\frac{\Omega U}{5} + R_c^4\rho D_{\rm v}\frac{\partial\Omega}{\partial R}\right)_{ZR} \tag{6}$$

La continuité du flux de moment cinétique implique :

$$\left(D_{\rm c}\rho\frac{\partial\Omega}{\partial R} - \frac{\rho\Omega}{5}\frac{\partial R_c}{\partial t}\right)_{ZC} = \left(\frac{\Omega\rho U}{5} + D_{\rm v}\rho\frac{\partial\Omega}{\partial R}\right)_{ZR}. \tag{7}$$

Avec diffusion micoscopique, pour une limite zone convective / zone radiative avec flux sortant, *i.e.* limite d'un cœur convectif :

$$D_{\rm c}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial R}\right)_{ZC} = \frac{\Omega}{5}\left(U + \frac{\partial R_c}{\partial t}\right) + D_{\rm v}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial R}\right)_{ZR}. \tag{8}$$

Pour une limite zone radiative / zone convective avec flux entrant, *i.e.* limite interne d'une zone convective externe :

$$-D_{\rm c}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial R}\right)_{ZC} = \frac{\Omega}{5}\left(U - \frac{\partial R_c}{\partial t}\right) + D_{\rm v}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial R}\right)_{ZR} \tag{9}$$

Sans diffusion microscopique, il y a lieu de conserver les valeurs de la densité de part et d'autre de la discontinuité. Les Eq.(8) et Eq.(9) définissent des conditions limites pour U, cotés radiatifs, d'une zone convective interne.
Une difficulté pratique est le calcul de $\frac{\partial R_c}{\partial t}$, en particulier lors de l'apparition/disparition des zone convective.